

Cálculo del área de un triángulo equilátero mediante desarrollos en serie de círculos inscritos

OXABITS

Nota técnica — Jerez de la Frontera, septiembre de 2026

oxabits.com

Resumen—Se examina la posibilidad de obtener el área de un triángulo equilátero como suma de las áreas de una familia numerable de círculos disjuntos inscritos en él, en lugar de mediante la fórmula clásica $A = bh/2$. Se analiza en primer lugar una cascada autosemejante de triángulos de esquina, que produce una serie geométrica de razón $1/3$ con suma cerrada exacta. Se demuestra que dicha cascada *no* recubre el triángulo: converge a $\pi\sqrt{3}/6 \approx 90,690$ % del área, con un déficit exacto e irreducible del 9,310 %. Se determina el requisito que tendría que cumplirse para recubrirlo por completo y se muestra por qué la geometría de los huecos lo impide. A continuación se muestra que el empaquetado apoloniano completo sí satisface la identidad buscada, por ser su conjunto residual de medida de Lebesgue nula, si bien carece de forma cerrada y converge con lentitud potencial. Finalmente se observa que, a diferencia de la cascada, el empaquetado apoloniano proporciona una determinación no circular de π .

Palabras clave—Círculo inscrito, empaquetado apoloniano, teorema de Descartes, series geométricas, dimensión de Hausdorff, geometría euclidiana.

I. INTRODUCCIÓN

LA FÓRMULA del área de un triángulo, $A = bh/2$, es probablemente el resultado más antiguo y más estable de la geometría plana. Su demostración es elemental y no admite mejora. Cabe, sin embargo, preguntarse si el mismo número puede alcanzarse por una vía completamente distinta: como límite de una suma de áreas de círculos alojados en el interior del triángulo.

La pregunta no es ociosa. Una descomposición del triángulo en círculos disjuntos, si existiera con una ley de formación suficientemente regular, proporcionaría una expresión del área como serie numérica; y puesto que el área de un círculo contiene el factor π mientras que la del triángulo no, tal identidad relacionaría π con cantidades puramente algebraicas.

Este trabajo examina dos construcciones concretas. La primera, que llamaremos *cascada de triángulos de esquina*, es autosemejante y admite suma en forma cerrada; se demostrará que su límite es estrictamente menor que el área. La segunda es el empaquetado apoloniano clásico, que sí agota el área pero no admite forma cerrada conocida.

II. PRELIMINARES GEOMÉTRICOS

Sea T un triángulo equilátero de lado L . Su altura es $h = L\sqrt{3}/2$, de modo que

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}. \quad (1)$$

El radio R del círculo inscrito coincide con la distancia del baricentro a cualquier lado, esto es $R = h/3$, luego

$$R = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{3}}{6}. \quad (2)$$

La fracción del triángulo ocupada por su círculo inscrito es entonces una constante universal, independiente de L :

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi R^2}{A} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0,6045998. \quad (3)$$

Conviene subrayar este valor, porque se presta a confusión con la densidad del empaquetado hexagonal de círculos en el plano, $\pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,9069$, que es un número distinto y responde a otra pregunta. El círculo inscrito cubre, pues, algo más del 60 % del triángulo y no el 90 %.

III. LA CASCADA DE TRIÁNGULOS DE ESQUINA

III-A. Construcción

Inscrito el círculo C_0 de radio R , trácese por cada uno de sus tres puntos más alejados de un lado la recta tangente paralela a dicho lado. Cada una de estas tres rectas secciona un triángulo equilátero en el vértice opuesto. Un cálculo inmediato de alturas muestra que dicho triángulo tiene lado

$$L_1 = (h - 2R) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{L}{3}. \quad (4)$$

El cálculo merece hacerse despacio, porque el $1/3$ no es evidente a ojo. El círculo inscrito tiene su centro a altura R sobre la base y su punto más alto a altura $2R$. La recta tangente horizontal pasa, pues, por $2R$, y el triángulito que queda por encima tiene altura $h - 2R$. Como $R = h/3$, esa altura vale $h - 2h/3 = h/3$: justo un tercio de la altura del triángulo grande. Y al ser ambos equiláteros, la razón de alturas es también la razón de lados.

Por tanto, su círculo inscrito tiene radio $R/3$ y es tangente a C_0 y a los dos lados concurrentes en ese vértice. Los tres triángulos de esquina son disjuntos y descansan íntegramente en el complemento de C_0 . La construcción puede por tanto reiterarse dentro de cada uno de ellos,

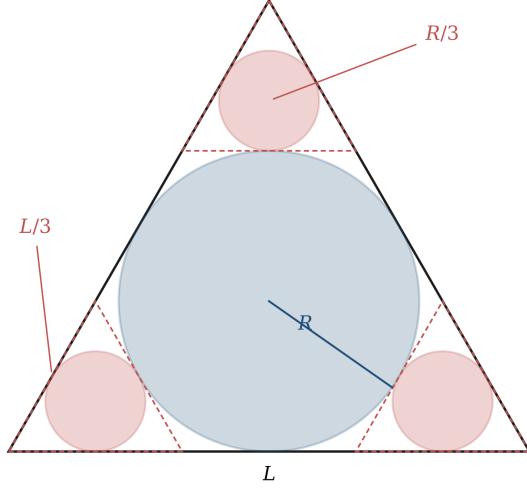


Fig. 1. Primera iteración. El círculo inscrito de radio R (azul) y las tres rectas tangentes paralelas a los lados, que delimitan tres triángulos de esquina de lado $L/3$ (trazo discontinuo) con sus respectivos círculos inscritos de radio $R/3$ (rojo). Cada círculo rojo es tangente al círculo azul y a dos lados del triángulo.

sin solapamiento alguno (Fig. 1). En la generación n se dispone así de

$$N_n = 3^n \text{ círculos de radio } r_n = \frac{R}{3^n}. \quad (5)$$

III-B. Planteamiento de la serie

El área total acumulada es una serie geométrica de razón $1/3$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \pi \left(\frac{R}{3^n}\right)^2 = \pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{9}\right)^n = \pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n. \quad (6)$$

Conviene detenerse en el origen de la razón $1/3$, que es donde suele perderse el hilo: el número de círculos se multiplica por 3 en cada generación, mientras que el área de cada uno se divide por 9, al ir el radio dividido por 3 y entrar elevado al cuadrado. El cociente $3/9 = 1/3$ es, pues, el producto de esos dos efectos contrapuestos, y el hecho de que sea menor que la unidad es justamente lo que garantiza la convergencia.

III-C. Suma de la serie geométrica

Recordemos el argumento elemental, válido para cualquier x real. Sea la suma parcial hasta el término N :

$$S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N. \quad (7)$$

Multiplíquese por x . El resultado es la misma suma desplazada un lugar:

$$xS_N = x + x^2 + \cdots + x^N + x^{N+1}. \quad (8)$$

Al restar (8) de (7) se cancelan todos los términos intermedios y sólo sobreviven el primero de una y el último de

otra, que es el punto en el que reside toda la gracia del argumento:

$$S_N(1-x) = 1 - x^{N+1} \implies S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}. \quad (9)$$

Si $|x| < 1$, el término x^{N+1} tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$, y la suma infinita vale $1/(1-x)$. Particularizando en nuestro caso, $x = 1/3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}(1 - 3^{-(N+1)}) \rightarrow \frac{3}{2}. \quad (10)$$

Obsérvese que el $3/2$ no procede de ninguna magia: es simplemente $1/(1 - 1/3) = 1/(2/3)$. Sustituyendo (10) en (6) queda

$$S = \frac{3}{2} \pi R^2. \quad (11)$$

III-D. El límite y su déficit

Llegados aquí conviene detenerse un momento, porque (11) está escrita en función de R mientras que el área (1) lo está en función de L , y dividir una por otra sin más equivale a saltarse un paso. Elevemos al cuadrado la relación (2) entre ambas magnitudes:

$$R^2 = \left(\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{L^2}{12}. \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11), el área total acumulada por la cascada admite una forma cerrada notablemente simple, ya sin rastro de radicales:

$$S = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \frac{L^2}{12} = \frac{\pi L^2}{8}. \quad (13)$$

Ahora ambos miembros hablan el mismo idioma y el cociente con (1) puede escribirse término a término:

$$\frac{S}{A} = \frac{\pi L^2/8}{L^2\sqrt{3}/4} = \frac{4\pi}{8\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \quad (14)$$

cuyo valor numérico es 0,9068997. El factor L^2 se cancela, como no podía ser de otro modo: se trata de un cociente de áreas, adimensional, que no depende del tamaño del triángulo sino únicamente de su forma. Un triángulo equilátero de un milímetro de lado y otro de un kilómetro arrojan idéntico porcentaje. Obsérvese, por último, que $\pi\sqrt{3}/6 = \frac{3}{2} \cdot \pi\sqrt{3}/9 = \frac{3}{2}K$, con K la constante definida en (3); es decir, la cascada completa recubre exactamente una vez y media lo que recubre por sí solo el círculo inscrito.

Que la serie converge no es, a estas alturas, un hecho que haya que establecer de nuevo: quedó probado en (9) y (10), donde el término x^{N+1} se desvanece sin más por ser $|x| < 1$. La ecuación (14) es ya el valor del límite. Lo único que añade la expresión siguiente es esa misma convergencia escrita generación a generación y normalizada al área del triángulo, que es la forma en que conviene leer la Tabla I:

$$\frac{S_n}{A} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}(1 - 3^{-(n+1)}). \quad (15)$$

Pero su límite *no* es el área del triángulo. El déficit es exacto:

$$1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,0931003 = 9,310 \%. \quad (16)$$

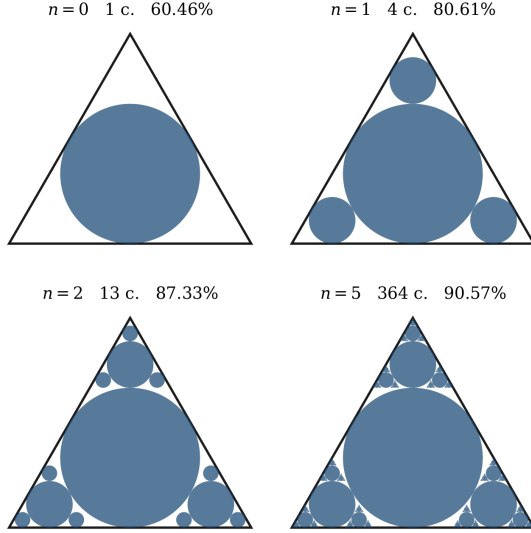


Fig. 2. Generaciones $n = 0, 1, 2$ y 5 de la cascada. El número de círculos crece como 3^n , pero el área recubierta se estanca: el blanco visible en el cuarto panel no desaparece al iterar, sino que tiende al 9,310 % del total.

TABLA I
CONVERGENCIA DE LA CASCADE DE TRIÁNGULOS DE ESQUINA

n	círculos	S_n/A	déficit
0	1	0,604600	39,540 %
1	4	0,806133	19,387 %
2	13	0,873311	12,669 %
3	40	0,895703	10,430 %
5	364	0,905656	9,434 %
8	9841	0,906854	9,315 %
∞	∞	0,906900	9,310 %

TABLA II
NOTACIÓN EMPLEADA

símbolo	significado
L	lado del triángulo equilátero
A	área del triángulo: $A = bh/2 = L^2\sqrt{3}/4$
R	radio del círculo inscrito: $R = L/(2\sqrt{3})$
K	fracción que ocupa el círculo inscrito: $K = \pi R^2/A = \pi\sqrt{3}/9$
S	área total sumada por todos los círculos de la cascada
S_n	la misma suma, truncada en la generación n
d	dimensión de Hausdorff del residuo apoloniano

Antes de proseguir conviene fijar la notación, pues a partir de aquí las mismas letras reaparecen con insistencia y conviene tenerlas a mano (Tabla II).

Merece leerse la última columna de la Tabla I con atención, porque describe un patrón muy regular. La distancia que separa S_n/A de su límite vale, según (15), $(\pi\sqrt{3}/6) \cdot 3^{-(n+1)}$, de modo que cada generación divide entre tres lo que faltaba. El déficit aparente pasa del 39,54 % al 19,39 %, y de ahí al 12,67 %, pero no tiende a cero: converge al 9,310 %, y lo que se divide entre tres en cada paso es únicamente el exceso sobre esa cifra. Es

la diferencia entre acercarse a cero y acercarse a una cota.

IV. ¿QUÉ HARÍA FALTA PARA LLENAR EL TRIÁNGULO?

IV-A. El requisito aritmético

La Tabla I muestra que la cascada se detiene en el 90,690 %, y la Fig. 1 deja ya adivinar por dónde se escapa el resto: alrededor del círculo de la generación 0 quedan seis regiones —dos por cada círculo pequeño, limitadas por un lado del triángulo y dos arcos— en las que ningún triángulo de la cascada entrará jamás. Antes de medirlas conviene plantear la pregunta al revés: ¿qué haría falta para que la cascada sí llenase el triángulo?

Merece plantearla contando los círculos uno a uno. Supóngase que cada uno se llevara la fracción K de su hueco, la misma que el círculo inscrito se lleva de su triángulo. La generación 0 coloca un solo círculo, que aporta K y deja libre $1 - K$, repartido en tres piquitos de $(1 - K)/3$ cada uno. La generación 1 inscribiría un círculo en cada piquito, llevándose $K(1 - K)/3$ de cada uno, de modo que los tres juntos aportarían

$$3 \cdot \frac{K(1 - K)}{3} = K(1 - K). \quad (17)$$

¿Y cuánto quedaría libre entonces? Basta restar lo aportado a lo que había, y el resultado se factoriza solo:

$$(1 - K) - K(1 - K) = (1 - K)(1 - K) = (1 - K)^2. \quad (18)$$

Aquí está el mecanismo que fabrica las potencias, y no hay más misterio: quitar la fracción K de una cantidad equivale a multiplicarla por $1 - K$. Cada generación repetiría esa operación sobre lo que encontrase libre, de modo que el área libre tras la generación n sería $(1 - K)^{n+1}$.

Ese $(1 - K)^2$ estaría esparcido en nueve huecos de $(1 - K)^2/9$ cada uno. En general, la generación n dispondría de 3^n regiones de área $(1 - K)^n/3^n$ cada una, y su aportación total sería

$$3^n \cdot \frac{K(1 - K)^n}{3^n} = K(1 - K)^n. \quad (19)$$

El recuento desaparece porque el número de círculos, 3^n , se cancela contra el 3^n del denominador: los huecos se multiplican por tres en la misma proporción en que se empequeñecen. Sumando:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3^n K(1 - K)^n}{3^n} = \sum_{n \geq 0} K(1 - K)^n = K \sum_{n \geq 0} (1 - K)^n. \quad (20)$$

El factor K que precede al sumatorio es el factor común de todos los términos, sacado fuera: cada generación aportaría K por el área libre al empezarla, y son esas áreas —1, $(1 - K)$, $(1 - K)^2$, ...— las que forman la progresión geométrica, de razón $1 - K$. Aplicando (9) con $x = 1 - K$, y puesto que $1 - (1 - K) = K$:

$$\sum_{n \geq 0} (1 - K)^n = \frac{1}{1 - (1 - K)} = \frac{1}{K}, \quad (21)$$

de donde la suma total valdría

$$K \cdot \frac{1}{K} = 1, \quad (22)$$

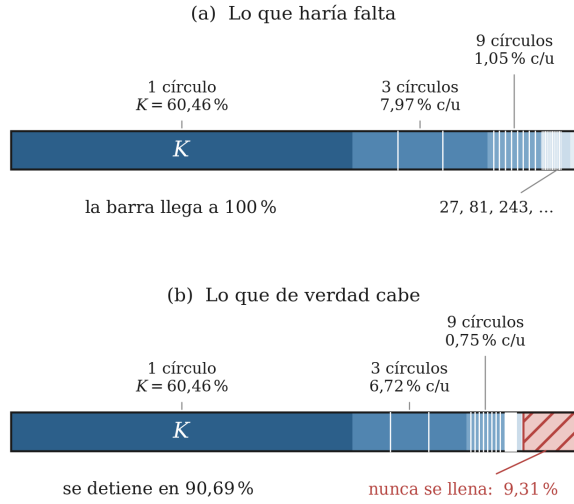


Fig. 3. Las dos contabilidades, con el área del triángulo como barra completa. Cada bloque es una generación, subdividida en tantas casillas como círculos coloca. (a) El requisito: si cada círculo se llevase la fracción K de su hueco, la barra se llenaría por entero. (b) Lo que realmente cabe: los círculos de la generación 1 miden $6,72\%$ y no $7,97\%$, los de la 2 miden $0,75\%$ y no $1,05\%$, y la barra se detiene para siempre en el $90,69\%$.

esto es, el área entera del triángulo. Queda así establecido el requisito: la cascada llenaría el triángulo si y sólo si cada círculo se llevase la fracción K de su hueco.

¡Pero es que no se la lleva, ya desde la generación 1!

IV-B. Lo que de verdad cabe en cada hueco

El requisito recién establecido no habla de círculos en absoluto: no depende de K , porque el K del numerador se cancela contra el $1/K$ del sumatorio. Consumir siempre una proporción fija de lo que resta termina consumiéndolo todo, sea del 60% o del 5% . Toda la carga recae, por tanto, sobre una única pregunta, y esa sí es geométrica: ¿cuánto se lleva realmente cada círculo de su hueco?

La respuesta es que no se lleva K , y la razón es de forma. Un piquito no es un triángulo: es la región curvilínea $T \setminus C_0$ —la diferencia de conjuntos, los puntos del triángulo que no pertenecen al círculo inscrito— dividida en tres trozos limitados cada uno por dos segmentos y un arco cóncavo. La constante $K = \pi R^2/A$ está definida únicamente para triángulos equiláteros, y no hay motivo alguno para que se herede en una región de otra forma.

La Fig. 3 enfrenta ambas contabilidades sobre una misma barra, que representa el área del triángulo. Arriba, la que haría falta: cada generación aporta bloques cada vez más finos, pero siempre en la proporción justa para que la barra acabe llenándose. Abajo, la que de verdad cabe: las mismas 1, 3, 9, 27... casillas, pero todas algo más estrechas, y una franja que nunca llega a cubrirse.

La Fig. 4 pone números al asunto, y conviene seguirla panel a panel. Con el área del triángulo normalizada a la unidad, cada piquito mide $(1 - K)/3 = 13,18\%$. El mayor círculo que cabe dentro de él es el de radio $R/3$,

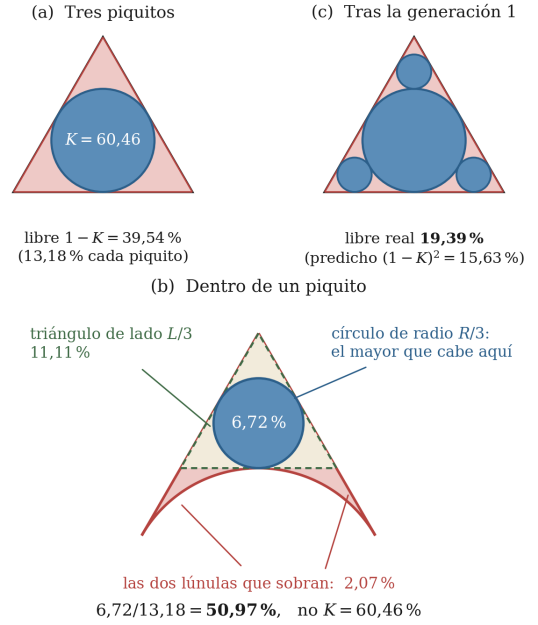


Fig. 4. Anatomía de la primera iteración, con el área del triángulo normalizada a la unidad. (a) El círculo inscrito se lleva $K = 60,46\%$ y deja tres piquitos de $13,18\%$ cada uno. (b) Dentro de un piquito sólo cabe un círculo de radio $R/3$, que cubre el $50,97\%$ de él y no el $60,46\%$: el triángulo de lado $L/3$ no agota el piquito, y las dos lúnulas curvas que sobran quedan fuera del alcance de toda generación futura. (c) El área libre tras la generación 1 es del $19,39\%$, superior al $15,63\%$ que exigiría el requisito.

que ocupa $K/9 = 6,72\%$. La fracción realmente cubierta es, por tanto, $6,72/13,18 = 50,97\%$, y no el $60,46\%$ que el requisito exige.

Merece subrayarse que ese círculo no es una elección mediocre que pudiera mejorarse: es literalmente el mayor que el piquito admite. Ni siquiera el óptimo llega a K . La forma del piquito —dos lados rectos y un arco cóncavo que le come el centro— impone un techo por debajo, y ahí se acaba la discusión.

La consecuencia se lee en el panel (c): tras la generación 1 el área libre es del $19,39\%$, y no el $(1 - K)^2 = 15,63\%$ que haría falta. Sobra hueco, y ese exceso reaparece en cada generación hasta acumular el $9,310\%$ final.

La contabilidad del primer paso lo cierra. El círculo inscrito y los tres triángulos de esquina son disjuntos y ocupan

$$K + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,60460 + 0,33333 = 0,93793, \quad (23)$$

de modo que un $6,207\%$ del triángulo queda ya fuera de todo triángulo de la cascada desde la primera iteración. Ese número no es nuevo: son las dos lúnulas del panel (b), que suman $2,07\%$ por piquito, multiplicadas por los tres piquitos. Y son también, exactamente, las seis regiones adyacentes al círculo de la generación 0 con las que se abriría esta sección. La suma de las fracciones perdidas en todas las generaciones es precisamente el $9,310\%$ de (16).

Una variante que tampoco funciona consiste en subdividir cada triángulo en cuatro de lado $L/2$ (tres derechos

y uno invertido) e inscribir círculos en los cuatro. Como la subdivisión sí tesela el triángulo, en la generación n los 4^n círculos cubren exactamente la fracción K —siempre la misma, sin acumulación—, y los círculos de generaciones distintas se solapan entre sí, por lo que sus áreas no son sumables. La construcción no converge a nada: oscila indefinidamente en el 60,46 %.

V. EL EMPAQUETADO APOLONIANO

V-A. Círculos máximos y teorema de Descartes

La cascada anterior es un empaquetado legítimo, pero no maximal: en cada hueco coloca el círculo inscrito en un triángulo auxiliar, no el mayor círculo que el hueco admite. Considérese el hueco limitado por un lado del triángulo y los círculos C_0 (radio R) y C_1 (radio $R/3$). Sus tres fronteras son mutuamente tangentes, de modo que es aplicable el teorema de los círculos de Descartes,

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}, \quad (24)$$

con curvaturas $k = 1/r$ y $k = 0$ para una recta. Con $k = (0, 1/R, 3/R)$ resulta $k_4 = (4 + 2\sqrt{3})/R$, es decir

$$r_4 = \frac{R}{4 + 2\sqrt{3}} \approx 0,133975 R, \quad (25)$$

frente al $R/9 \approx 0,111111 R$ que la cascada coloca en ese mismo hueco. La diferencia, repetida en infinitos huecos, explica por sí sola el déficit del 9,310 %.

Conviene advertir por qué el teorema no servía en el paso anterior. Exige que las tres fronteras del hueco sean mutuamente tangentes, y en el hueco de esquina dos de ellas son lados del triángulo que se cortan en un vértice, no que se tocan. Aquí, en cambio, el lado es tangente a los dos círculos y los dos círculos son tangentes entre sí, de modo que la condición se cumple.

V-B. El residuo tiene medida nula

Iterando la inserción del círculo máximo en cada hueco se obtiene el empaquetado apoloniano del triángulo. Su conjunto residual —los puntos jamás cubiertos— es una junta apoloniana, cuya dimensión de Hausdorff vale [1]

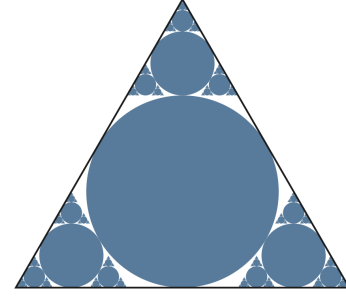
$$d \approx 1,3056867 < 2, \quad (26)$$

de modo que su medida de Lebesgue bidimensional es nula. Se concluye entonces, ahora sí con rigor, la identidad buscada:

$$\sum_i \pi r_i^2 = A = \frac{bh}{2} \quad \text{exactamente.} \quad (27)$$

La vía alternativa al área existe, pues, pero al precio de renunciar a la forma cerrada: los radios r_i se generan recursivamente mediante (24) y no se conoce expresión compacta para su suma.

Cascada de triángulos — 90,685 % del área



Empaquetado apoloniano — 99,873 % del área

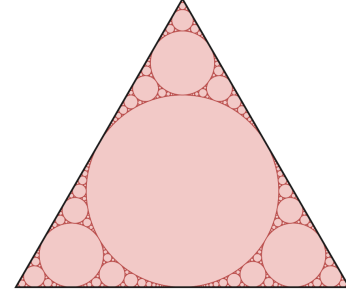


Fig. 5. Comparación de ambos empaquetados con idéntico criterio de corte. Arriba: la cascada de triángulos, con su residuo blanco persistente. Abajo: el empaquetado apoloniano, cuyo residuo es una junta de medida nula.

V-C. Velocidad de convergencia

El número de círculos de radio mayor que r escala como r^{-d} , y el área residual como r^{2-d} . Eliminando r se obtiene la ley potencial

$$1 - \frac{S_N}{A} \sim N^{-(2-d)/d} = N^{-0,5318}. \quad (28)$$

El ajuste sobre los 56 941 círculos calculados arroja un exponente empírico de $-0,5299$, en acuerdo con (28) dentro del 0,4 % (Fig. 6). La convergencia es, por tanto, desesperadamente lenta: alcanzar tres cifras decimales correctas exige del orden de 10^6 círculos, y diez cifras quedan fuera de todo alcance computacional.

Conviene detenerse en lo que significa ese exponente, porque es el que gobierna todo el comportamiento. La dimensión de Hausdorff de la junta apoloniana vale aproximadamente 1,3057: está estrictamente entre 1 y 2, lo que la sitúa a medio camino entre una curva y una superficie. Un conjunto de dimensión 1 —una recta, una circunferencia— tiene área nula por razones evidentes. La junta también la tiene, pero por muy poco: cuanto más se aproxima d a 2, más lentamente se anula el residuo, y 1,3057 está lo bastante cerca de 2 como para que esa anulación resulte desesperante.

Traducido a números: para dividir el residuo entre diez hace falta multiplicar el número de círculos por $10^{1/0,53} \approx 78$. Cada cifra decimal de más cuesta, por tanto, unas ochenta veces más cálculo que la anterior, y ese factor se acumula.

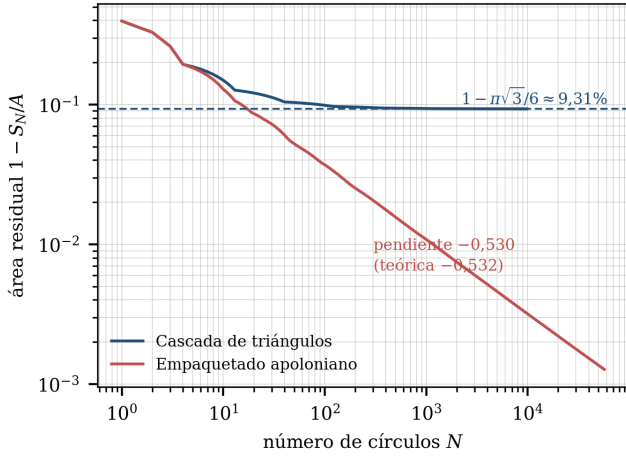


Fig. 6. Área residual frente al número de círculos, en escala doblemente logarítmica. La cascada se estanca en el 9,310 % (línea discontinua); el empaquetado apoloniano decae según una ley potencial de exponente $-0,530$.

TABLA III
COMPARACIÓN DE AMBAS CONSTRUCCIONES

N	cascada	apoloniano
1	60,460 %	60,460 %
11	85,838 %	87,871 %
101	90,132 %	96,310 %
1 001	90,638 %	98,916 %
10 001	90,677 %	99,682 %
56 941	—	99,873 %
∞	90,690 %	100,000 %

VI. EXTRACCIÓN DEL NÚMERO π

La identidad (14) contiene π en ambos miembros: S se ha definido sumando áreas de círculos, y despejar π de ella devuelve $\pi = \pi$. Es una identidad vacía, sin contenido aritmético.

El caso apoloniano es distinto, y merece señalarse. Los radios r_i de (27) se determinan por (24) a partir de L mediante operaciones racionales y raíces cuadradas: en su construcción no interviene π en ningún momento. Despejando en (27):

$$\pi = \frac{A}{\sum_i r_i^2} = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4 \sum_i r_i^2}. \quad (29)$$

Se trata de una determinación genuina de π como límite de cocientes algebraicos, no de una tautología. Su interés es, no obstante, exclusivamente conceptual: con los 56 941 círculos calculados, (29) rinde $\pi \approx 3,1456$, con un error del 0,13 %. La ley (28) implica que el número de círculos necesarios crece como $10^{1,88m}$ para m cifras correctas, lo que sitúa una decena de dígitos más allá de cualquier cómputo concebible. Cualquier serie clásica —Machin, Chudnovsky, BBP [5]— la supera por márgenes astronómicos.

VII. CONCLUSIONES

1. La cascada autosemejante de triángulos de esquina define una serie geométrica de razón $1/3$ cuya suma

cerrada es $\pi\sqrt{3}/6 \approx 90,690$ % del área del triángulo. No recubre la figura; el déficit, $1 - \pi\sqrt{3}/6 \approx 9,310$ %, es exacto e irreducible.

2. Llenar el triángulo exigiría que cada círculo se llevase la fracción $K = \pi\sqrt{3}/9$ de su hueco. No lo hace: un piquito no es un triángulo, y el mayor círculo que admite cubre sólo el 50,97 % de él. Ya en la primera iteración un 6,207 % del área escapa a toda generación futura.
3. El empaquetado apoloniano sí verifica $\sum \pi r_i^2 = bh/2$, por tener su residuo dimensión de Hausdorff $\approx 1,3057$ y, en consecuencia, medida nula. Carece de forma cerrada y converge como $N^{-0,53}$.
4. Únicamente el empaquetado apoloniano proporciona una determinación no circular de π , si bien de utilidad práctica nula.

La conclusión general es que la fórmula $bh/2$ no admite sustituto competitivo por esta vía. Lo que el ejercicio sí ofrece es una ilustración nítida de un fenómeno recurrente en análisis: una serie puede converger con toda limpieza y, aun así, converger al número equivocado.

REFERENCIAS

- [1] D. W. Boyd, «The residual set dimension of the Apollonian packing», *Mathematika*, vol. 20, n.º 2, pp. 170–174, 1973.
- [2] R. L. Graham, J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks y C. H. Yan, «Apollonian circle packings: number theory», *J. Number Theory*, vol. 100, n.º 1, pp. 1–45, 2003.
- [3] H. S. M. Coxeter, «The problem of Apollonius», *Amer. Math. Monthly*, vol. 75, n.º 1, pp. 5–15, 1968.
- [4] F. Soddy, «The kiss precise», *Nature*, vol. 137, p. 1021, 1936.
- [5] D. H. Bailey, P. B. Borwein y S. Plouffe, «On the rapid computation of various polylogarithmic constants», *Math. Comp.*, vol. 66, n.º 218, pp. 903–913, 1997.