

Un círculo entre dos círculos: el teorema de Pitágoras y los círculos de Ford

OXABITS

Nota técnica — Jerez de la Frontera, septiembre de 2026

oxabits.com

Resumen—Dos círculos iguales de radio R descansan sobre una recta y son tangentes entre sí; en el hueco que dejan con la recta cabe un tercer círculo tangente a los tres. Se demuestra que su radio es exactamente $X = R/4$ con un único triángulo rectángulo, de catetos R y $R - X$ e hipotenusa $R + X$, sin recurrir a coordenadas. El mismo triángulo, con radios distintos, prueba que los puntos de apoyo de dos círculos tangentes de radios r_1 y r_2 distan $2\sqrt{r_1 r_2}$, y de ahí se obtiene la regla general $1/\sqrt{x} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$. Iterando la construcción, las inversas de las raíces de los radios se suman como los denominadores del árbol de Stern–Brocot y aparecen los radios $R/4, R/9, R/16, R/25 \dots$. Con $R = 1/2$ la figura es exactamente la de los círculos de Ford, en la que a cada fracción irreducible p/q le corresponde un círculo de radio $1/(2q^2)$. Se demuestra el criterio de tangencia $|ps - qr| = 1$ y se calcula que estos círculos ocupan una fracción $\pi\zeta(3)/(4\zeta(4)) \approx 87,23\%$ de la banda de altura unidad que los contiene.

Palabras clave—Círculos tangentes, teorema de Pitágoras, círculos de Ford, sucesiones de Farey, árbol de Stern–Brocot, sangaku, teorema de Descartes.

I. INTRODUCCIÓN

EL problema es de los que se plantean con una moneda y dos monedas mayores sobre la mesa. Dos círculos iguales, de radio R , se apoyan en una recta y se tocan entre sí. Debajo del punto de contacto queda un hueco curvilíneo, limitado por los dos arcos y la recta, y en él cabe un círculo menor que toca a los tres. ¿Cuál es su radio?

El autor resolvió en su día la cuestión por la vía analítica, planteando coordenadas y resolviendo el sistema correspondiente. El resultado es limpio, $X = R/4$, pero el camino no lo es, y deja la sensación de que un resultado tan sencillo debería tener una razón geométrica igual de sencilla. Esta nota recoge esa razón, que se reduce a encontrar el triángulo rectángulo adecuado, y sigue el hilo hasta donde lleva: una regla general para radios cualesquiera, una cascada infinita de círculos cuyos radios son R dividido por cuadrados perfectos y, finalmente, los círculos de Ford, que representan geoméricamente las fracciones irreducibles.

II. EL PROBLEMA

Sean C_1 y C_2 dos círculos de radio R tangentes a la recta ℓ y tangentes entre sí, y sea C el círculo de radio X

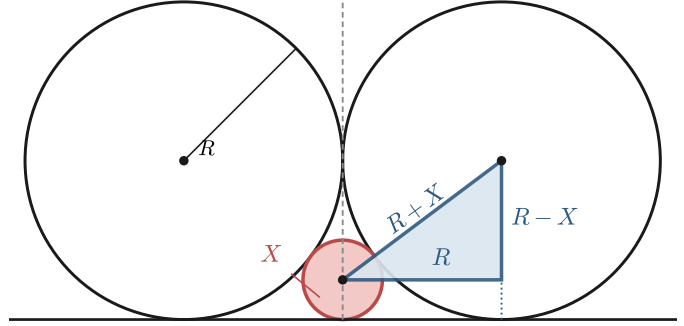


Fig. 1. Dos círculos de radio R tangentes entre sí y a una recta, y el círculo de radio X que cabe en el hueco. El triángulo sombreado une el centro del círculo pequeño con el de uno de los grandes.

tangente a ℓ , a C_1 y a C_2 , situado en el hueco que los tres delimitan (Fig. 1).

Por simetría, el centro de C está en la perpendicular a ℓ que pasa por el punto de contacto de C_1 y C_2 : la figura es simétrica respecto de esa recta y el círculo buscado es único. Como C es tangente a ℓ , su centro está a altura X ; como C_1 y C_2 también lo son, sus centros están a altura R , a una distancia horizontal R del eje de simetría.

III. LA DEMOSTRACIÓN CON PITÁGORAS

Proposición 1: El radio del círculo pequeño es $X = R/4$.

Demostración: Considérese el triángulo que tiene por vértices el centro de C , el centro de C_2 y el punto situado a la altura del centro de C en la vertical del centro de C_2 (Fig. 1). Es rectángulo, y sus lados valen:

- la hipotenusa, que une dos centros de círculos tangentes exteriormente, mide la suma de los radios, $R + X$;
- el cateto horizontal mide la distancia del eje de simetría al centro de C_2 , es decir, R ;
- el cateto vertical mide la diferencia de alturas de los centros, $R - X$.

El teorema de Pitágoras da

$$(R + X)^2 = R^2 + (R - X)^2.$$

Al desarrollar los dos cuadrados, los términos R^2 y X^2 aparecen a ambos lados y se cancelan, y queda

$$2RX = R^2 - 2RX \implies 4RX = R^2 \implies X = \frac{R}{4}.$$

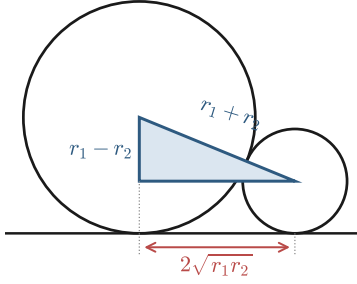


Fig. 2. Dos círculos tangentes entre sí y a una recta. El triángulo rectángulo de hipotenusa $r_1 + r_2$ y cateto vertical $r_1 - r_2$ da la distancia entre los puntos de apoyo.

Lo notable es la cancelación. La diferencia $(R + X)^2 - (R - X)^2$ es siempre $4RX$, cualesquiera que sean R y X , porque es una diferencia de cuadrados: $(R + X + R - X)(R + X - R + X) = 2R \cdot 2X$. La proposición dice simplemente que ese producto tiene que ser igual a R^2 , el cuadrado del cateto horizontal. Todo el problema está en ese triángulo: la hipotenusa suma los radios, el cateto vertical los resta y el horizontal es fijo.

III-A. La vía analítica, para comparar

Con el origen en el punto de apoyo de C , los centros son $(0, X)$ y (R, R) , y la condición de tangencia exterior se escribe $\sqrt{R^2 + (R - X)^2} = R + X$. Elevando al cuadrado se llega a la misma ecuación. La geometría analítica no aporta nada que el triángulo no dé, pero lo oculta: la ecuación aparece como el resultado de una fórmula de distancias, y no como la afirmación, visible en la figura, de que un triángulo concreto es rectángulo.

IV. CÍRCULOS DE RADIOS DISTINTOS

El mismo triángulo sirve cuando los dos círculos que se apoyan en la recta no son iguales.

Lema 1: Si dos círculos de radios r_1 y r_2 son tangentes entre sí y a la recta ℓ , sus puntos de apoyo en ℓ distan $2\sqrt{r_1 r_2}$.

Demostración: El segmento que une los centros mide $r_1 + r_2$, y la diferencia de alturas de los centros es $r_1 - r_2$ (Fig. 2). La distancia horizontal d entre los centros, que es la misma que entre los puntos de apoyo, cumple

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1 r_2.$$

Es de nuevo la diferencia de cuadrados de antes. Con el lema, el problema general se resuelve sumando distancias.

Proposición 2: Si C_1 y C_2 , de radios r_1 y r_2 , son tangentes entre sí y a ℓ , el círculo de radio x tangente a los dos y a ℓ en el hueco que dejan cumple

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}. \quad (1)$$

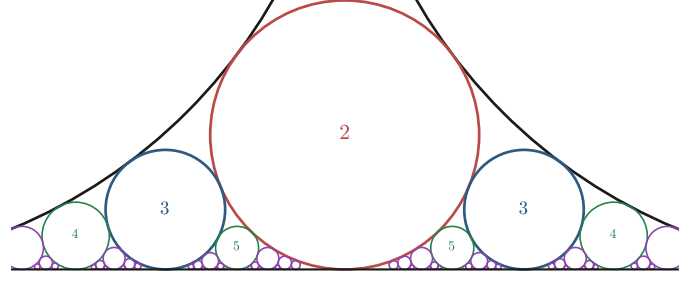


Fig. 3. Cascada de círculos en el hueco bajo dos círculos de radio R (arcos negros). Cada número n indica un círculo de radio R/n^2 ; el número de cada círculo es la suma de los de los dos círculos entre los que se encaja.

Demostración: El punto de apoyo de C está entre los de C_1 y C_2 . Aplicando el lema 1 a las tres parejas de círculos tangentes,

$$2\sqrt{r_1 x} + 2\sqrt{x r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Dividiendo por $2\sqrt{r_1 r_2 x}$ se obtiene (1).

Con $r_1 = r_2 = R$ la regla da $1/\sqrt{x} = 2/\sqrt{R}$, es decir, $x = R/4$: la proposición 1 es el caso particular. La fórmula (1) aparece en las tablillas votivas (*sangaku*) que los matemáticos japoneses colgaban en los templos durante el periodo Edo [2], y es también un caso límite del teorema de Descartes sobre cuatro círculos mutuamente tangentes [3]: si se llama curvatura $k = 1/r$ a la inversa del radio y se toma la recta como un círculo de curvatura 0, el teorema da $k = k_1 + k_2 + 2\sqrt{k_1 k_2}$, que es (1) elevada al cuadrado.

V. LA CASCADA

La regla (1) invita a medir cada círculo por el número $n = \sqrt{R/r}$, de modo que un círculo de radio r tiene radio R/n^2 . Los dos círculos de partida tienen $n = 1$, y la regla dice que el círculo que cabe entre dos tangentes tiene como número la *suma* de los números de sus padres.

Al repetir la construcción en cada uno de los nuevos huecos, siempre entre dos círculos tangentes y la recta, se obtiene la cascada de la Fig. 3. Entre los dos círculos iniciales aparece el 2, de radio $R/4$. A cada lado de éste, entre un 1 y el 2, aparece un 3, de radio $R/9$. En la generación siguiente, $1 + 3 = 4$ y $3 + 2 = 5$ dan círculos de radios $R/16$ y $R/25$, y así sucesivamente. Todos los radios son R dividido por un cuadrado perfecto, y todos los enteros $n \geq 2$ aparecen, pues en la generación g el número más a la izquierda es $g + 1$.

La regla de sumar números es la que genera el árbol de Stern–Brocot, en el que cada fracción nueva se obtiene sumando numeradores y denominadores de sus dos vecinas, $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (la llamada *mediante*) [5]. La coincidencia no es casual, y conduce al último apartado.

VI. LOS CÍRCULOS DE FORD

Lester R. Ford publicó en 1938 una representación geométrica de las fracciones [1]. A cada fracción irreducible

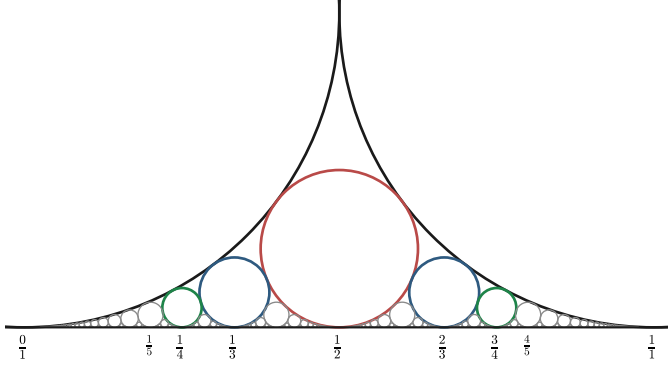


Fig. 4. Círculos de Ford en $[0,1]$ con denominadores $q \leq 40$. Los colores distinguen $q = 1$ (negro), $q = 2$ (rojo), $q = 3$ (azul) y $q = 4$ (verde).

p/q se le asocia el círculo tangente a la recta real en el punto p/q , por encima, de radio

$$r\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2q^2}. \quad (2)$$

Los enteros $0/1$ y $1/1$ tienen círculos de radio $1/2$, que son tangentes entre sí porque sus puntos de apoyo distan $1 = 2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$. Es exactamente la configuración de partida con $R = 1/2$, y el círculo del hueco, de radio $R/4 = 1/8$, es el de la fracción $1/2$. La Fig. 4 muestra los círculos de Ford del intervalo $[0,1]$ con denominador hasta 40.

Proposición 3: Dos círculos de Ford distintos, de fracciones p/q y r/s , nunca se cortan. Son tangentes si y sólo si $|ps - qr| = 1$.

Demostración: Por el lema 1, dos círculos apoyados en la recta, de radios r_1 y r_2 y con puntos de apoyo separados d , son tangentes si $d^2 = 4r_1r_2$, disjuntos si $d^2 > 4r_1r_2$ y secantes si $d^2 < 4r_1r_2$. Aquí

$$d^2 - 4r_1r_2 = \left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right)^2 - \frac{1}{q^2s^2} = \frac{(ps - qr)^2 - 1}{q^2s^2}.$$

Como $ps - qr$ es un entero no nulo (las fracciones son distintas e irreducibles), su cuadrado es al menos 1, y vale 1 exactamente cuando $|ps - qr| = 1$. ■

Con $R = 1/2$, el número $n = \sqrt{R/r}$ de la sección anterior vale, para el círculo (2), $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2q^2} = q$: es el denominador de la fracción. La regla de la cascada, que suma los números de los dos padres, suma por tanto denominadores, y el círculo que cabe entre los de p/q y r/s tangentes es el de la mediana $(p+r)/(q+s)$, cuyo determinante con cada uno de los padres vuelve a valer ± 1 . La cascada de la Fig. 3 es la de los círculos de Ford, y los números de cada círculo son los denominadores de las sucesiones de Farey [4].

VI-A. Cuánto ocupan

En cada intervalo $[m, m+1)$ hay un círculo por cada fracción irreducible p/q del intervalo, es decir, $\varphi(q)$ círculos de denominador q , donde φ es la función de Euler (para

$q = 1$, el del entero m). El área total por unidad de longitud es

$$\sum_{q \geq 1} \varphi(q) \pi \left(\frac{1}{2q^2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{q \geq 1} \frac{\varphi(q)}{q^4} = \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \approx 0,8723,$$

por la identidad clásica $\sum \varphi(q)q^{-s} = \zeta(s-1)/\zeta(s)$ [4]. Como los círculos mayores tienen diámetro 1, todos están en la banda $0 \leq y \leq 1$: los círculos de Ford ocupan el 87,23 % de esa banda. La suma directa hasta $q = 3000$, calculada para esta nota, da 0,872 284, de acuerdo con el valor exacto 0,872 284 04.

VII. CONCLUSIONES

El radio $R/4$ del círculo que cabe entre dos círculos iguales se obtiene de un solo triángulo rectángulo cuya hipotenusa suma los radios y cuyo cateto vertical los resta: la diferencia de sus cuadrados es $4RX$ y debe igualar al cuadrado del cateto horizontal. Con radios distintos, el mismo triángulo da la distancia $2\sqrt{r_1r_2}$ entre puntos de apoyo, y de ella se deduce la regla $1/\sqrt{x} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$. Iterada, esa regla produce círculos de radios R/n^2 con n sumándose como denominadores de fracciones, y con $R = 1/2$ reconstruye los círculos de Ford: el dibujo de dos monedas y una moneda pequeña contiene, en germen, la aritmética de las fracciones irreducibles.

REFERENCIAS

- [1] L. R. Ford, «Fractions», *Amer. Math. Monthly*, vol. 45, n.º 9, pp. 586–601, 1938.
- [2] H. Fukagawa y T. Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [3] H. S. M. Coxeter, «The problem of Apollonius», *Amer. Math. Monthly*, vol. 75, n.º 1, pp. 5–15, 1968.
- [4] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6.ª ed. Oxford: Oxford University Press, 2008, caps. 3 y 16.
- [5] R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2.ª ed. Reading: Addison-Wesley, 1994, sec. 4.5.