

El heptágono con escuadra y cartabón: crónica de un intento fallido

OXABITS

Nota técnica — Jerez de la Frontera, septiembre de 2026

oxabits.com

Resumen—Se analiza un intento de construir el heptágono regular inscrito en una circunferencia de radio R con compás, escuadra y cartabón. El procedimiento traza primero el hexágono regular, cuyo perímetro es $6R$, lleva esa longitud sobre una recta, la divide en siete partes iguales por el teorema de Tales y toma $6R/7$ como lado del heptágono. Al llevar siete veces esa cuerda sobre la circunferencia el polígono no cierra: queda un hueco de $4,72^\circ$, y el lado propuesto es un 1,22 % más corto que el verdadero, $2R \sin(\pi/7) \approx 0,86777 R$. Se muestra que la división de Tales es exacta y que todo el error procede de suponer que el heptágono tiene el mismo perímetro que el hexágono, cuando el perímetro de los polígonos inscritos crece con el número de lados hacia $2\pi R$. Se demuestra que ninguna construcción con regla y compás puede dar el lado exacto, pues su cuadrado es raíz de un polinomio cúbico irreducible (teorema de Gauss–Wantzel), y se comparan las aproximaciones clásicas, entre ellas la de Herón, $\sqrt{3}R/2$, con un error del 0,20 %.

Palabras clave—Heptágono regular, construcciones con regla y compás, teorema de Tales, teorema de Gauss–Wantzel, polígonos inscritos, construcciones aproximadas.

I. INTRODUCCIÓN

EL hexágono regular se construye con el compás sin pensar: el lado es igual al radio, y basta llevarlo seis veces sobre la circunferencia. El pentágono exige una construcción más elaborada, pero también es exacta y se conoce desde Euclides. El heptágono, el siguiente, es el primer polígono regular que se resiste: ninguna construcción con regla y compás lo produce exactamente.

Esta nota analiza un intento de sortear esa dificultad con las herramientas del dibujo técnico, compás, escuadra y cartabón. La idea es natural y el resultado, a simple vista, casi bueno. Se trata de entender por qué falla, cuánto falla y por qué no hay modo de arreglarlo sin salirse de las reglas del juego.

II. EL PROCEDIMIENTO

El intento consta de tres pasos (Fig. 1):

1. Se traza la circunferencia de radio R y en ella el hexágono regular, llevando el radio seis veces con el compás. Su perímetro es $6R$.
2. Se lleva ese perímetro sobre una recta, como seis segmentos consecutivos de longitud R , desde un origen 0 hasta el punto $6R$.

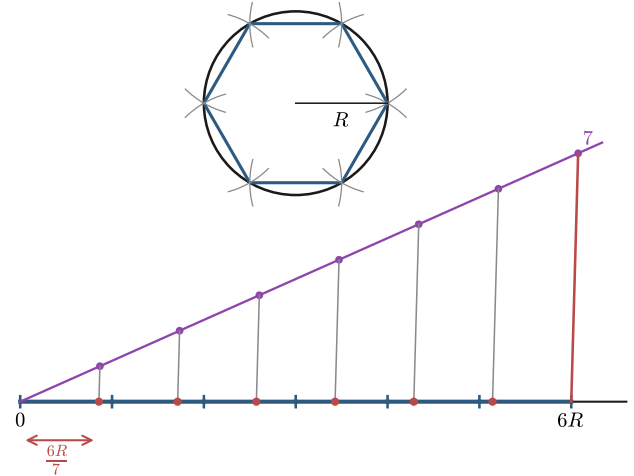


Fig. 1. El procedimiento. Arriba, el hexágono inscrito, de lado R . Abajo, el perímetro $6R$ llevado sobre una recta y dividido en siete partes por el teorema de Tales: la recta roja une la séptima marca de la semirrecta auxiliar con el punto $6R$, y las paralelas grises cortan el segmento en múltiplos de $6R/7$.

3. Se divide el segmento $[0,6R]$ en siete partes iguales por el procedimiento de Tales: se traza desde el origen una semirrecta auxiliar, se marcan en ella con el compás siete segmentos iguales cualesquiera, se une la séptima marca con el punto $6R$ y, deslizando la escuadra sobre el cartabón, se trazan por las demás marcas paralelas a esa recta. Los cortes con el segmento lo dividen en siete partes de longitud $6R/7$.

La longitud $6R/7$ se toma como lado del heptágono y se lleva siete veces sobre la circunferencia.

III. EL RESULTADO

Al llevar la cuerda $6R/7$ siete veces sobre la circunferencia, el último punto no coincide con el primero (Fig. 2). Cada cuerda de longitud c abarca un ángulo central $2 \arcsin(c/(2R))$; con $c = 6R/7$,

$$2 \arcsin \frac{3}{7} = 50,7539^\circ, \quad 7 \times 50,7539^\circ = 355,2771^\circ.$$

Faltan $4,72^\circ$ para cerrar la vuelta, y la distancia entre el primer y el último punto es $0,0824 R$. Con el radio de 30 mm del dibujo original, el hueco mide unos 2,5 mm: perfectamente visible.

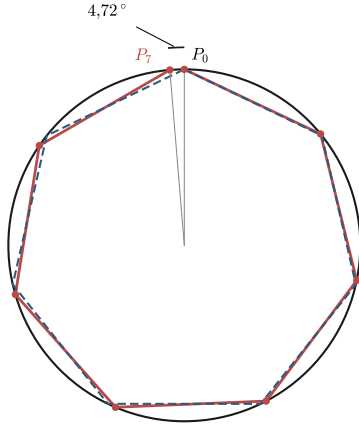


Fig. 2. Siete cuerdas de longitud $6R/7$ llevadas sobre la circunferencia (rojo) y el heptágono regular verdadero (azul discontinua). El último punto, P_7 , se queda $4,72^\circ$ antes del primero, P_0 .

El lado verdadero del heptágono inscrito es la cuerda que abarca $360^\circ/7$:

$$\ell_7 = 2R \sin \frac{\pi}{7} \approx 0,867767 R,$$

mientras que $6R/7 \approx 0,857143 R$. El lado propuesto es un 1,22 % más corto. El error por lado es pequeño, pero al llevar el lado siete veces se acumula, y eso es lo que hace visible el fallo.

IV. DÓNDE ESTÁ EL ERROR

IV-A. La división de Tales es exacta

El teorema de Tales garantiza que rectas paralelas cortan dos secantes en segmentos proporcionales. Las paralelas trazadas con escuadra y cartabón dividen el segmento $[0,6R]$ en siete partes rigurosamente iguales. Con esas herramientas puede dividirse cualquier segmento en cualquier número de partes; el paso 3 no introduce error alguno.

IV-B. El perímetro no es el mismo

El error está en el planteamiento: se ha supuesto que el heptágono inscrito tiene el mismo perímetro que el hexágono inscrito. No es así. El perímetro del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio R es

$$p_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n},$$

que crece con n y tiende a la longitud de la circunferencia, $2\pi R \approx 6,2832 R$, cuando $n \rightarrow \infty$ (Fig. 3). Es el argumento con el que Arquímedes acotó π [1]: cada polígono con más lados se ciñe mejor a la circunferencia y la recorre por un camino más largo. Para el hexágono, $p_6 = 6R$; para el heptágono, $p_7 \approx 6,0744 R$. Dividiendo por siete el perímetro del hexágono se obtiene el lado de un heptágono con $0,0744 R$ de perímetro de menos.

Tampoco serviría dividir la circunferencia completa. Si se llevase sobre la recta $2\pi R$, lo que por otra parte

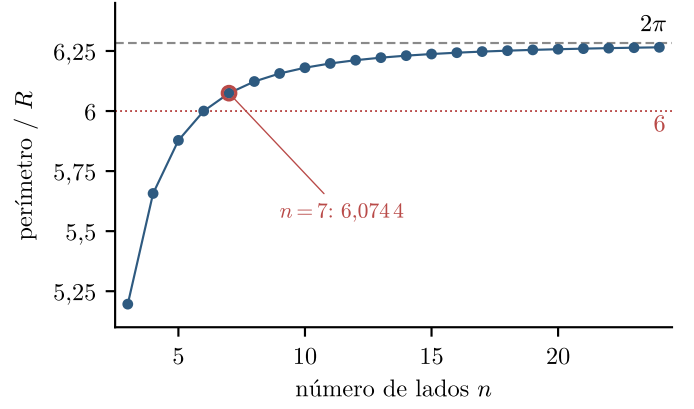


Fig. 3. Perímetro del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio R . Crece con n hacia $2\pi R$; el del heptágono supera en un 1,24 % al del hexágono.

no puede hacerse con regla y compás, y se dividiera entre siete, se obtendría el *arco* de un séptimo de vuelta, $2\pi R/7 \approx 0,8976 R$. Llevado como cuerda, es un 3,44 % más largo que el lado y da una vuelta de $373,3^\circ$. La cuerda es siempre más corta que su arco, y el lado verdadero queda entre las dos propuestas: $p_6/7 < \ell_7 < 2\pi R/7$. Para obtenerlo con el método de Tales habría que conocer de antemano el perímetro $p_7 = 7\ell_7$, lo que supone conocer ya el lado.

V. NO HAY CONSTRUCCIÓN EXACTA

V-A. El teorema de Gauss-Wantzel

Gauss demostró en 1801 que el polígono regular de n lados es construible con regla y compás si n es producto de una potencia de 2 por primos de Fermat distintos, primos de la forma $2^{2^k} + 1$ (3, 5, 17, 257 y 65537 son los únicos conocidos) [2]. Wantzel probó en 1837 que la condición es también necesaria [3]. El 7 es primo pero no de Fermat, así que el heptágono no es construible. En el caso del heptágono el argumento puede hacerse explícito.

Proposición 1: Con $R = 1$, el cuadrado del lado del heptágono, ℓ_7^2 , es raíz del polinomio cúbico irreducible $y^3 - 7y^2 + 14y - 7$. En consecuencia, ℓ_7 no es construible con regla y compás.

Demostración: Sea $c = 2 \cos(2\pi/7)$. Los números $2 \cos(2\pi k/7)$, $k = 1, 2, 3$, son las raíces de $x^3 + x^2 - 2x - 1$, como se comprueba sumando las raíces séptimas de la unidad distintas de 1 y agrupándolas por pares conjugados. Por el teorema del coseno, $\ell_7^2 = 2 - 2 \cos(2\pi/7) = 2 - c$. Sustituyendo $c = 2 - y$ en el polinomio se obtiene

$$(2 - y)^3 + (2 - y)^2 - 2(2 - y) - 1 = -(y^3 - 7y^2 + 14y - 7).$$

Si este cúbico tuviera un factor racional tendría una raíz racional, que habría de ser ± 1 o ± 7 , y ninguno lo es. Por tanto es irreducible y ℓ_7^2 tiene grado 3 sobre los racionales. Los números construibles con regla y compás se obtienen con una cadena de extensiones cuadráticas, y su grado es siempre una potencia de 2. Como 3 no lo es, ni ℓ_7^2 ni ℓ_7 son construibles. ■

TABLA I
APROXIMACIONES DEL LADO DEL HEPTÁGONO INSCRITO ($R = 1$)

Propuesta	Longitud	Error	Hueco
6/7 (esta nota)	0,857 14	-1,22 %	4,72°
$\sqrt{3}/2$ (Herón)	0,866 03	-0,20 %	0,78°
Lado exacto $2 \sin(\pi/7)$	0,867 77	0	0
$2\pi/7$ (el arco)	0,897 60	+3,44 %	-13,33°

Esto no depende de la ingeniosidad del procedimiento: escuadra y cartabón sólo permiten trazar paralelas, perpendiculares y ángulos de 30°, 45° y 60°, y todo ello se hace también con regla y compás. Ninguna combinación de esas herramientas puede producir el lado exacto.

V-B. Con otras herramientas sí

El heptágono es construible si se permite algo más que regla y compás. Arquímedes lo construyó mediante una *neusis*: una regla con dos marcas que se desliza hasta que las marcas caen sobre dos líneas dadas [4]. También lo es con un trisector de ángulos, porque el polinomio cúbico anterior tiene sus tres raíces reales, y Gleason mostró en 1988 que los polígonos construibles con regla, compás y trisector son exactamente aquellos cuyo número de lados es de la forma $2^a 3^b$ por primos distintos de la forma $2^m 3^n + 1$, entre los que está el 7 [5]. Las dos herramientas equivalen a poder resolver ecuaciones de tercer grado.

VI. LAS APROXIMACIONES

Ya que la construcción exacta es imposible, lo que cuenta es la precisión. La TABLA I compara la propuesta analizada con otras.

La mejor de las sencillas es la que Herón de Alejandría recoge en su *Métrica* y que los manuales de dibujo técnico repiten desde Durero [6]: el lado del heptágono es, aproximadamente, la mitad del lado del triángulo equilátero inscrito, es decir, la apotema del hexágono, $\sqrt{3}R/2$. Se obtiene con el compás en un paso: se traza un arco de radio R centrado en un punto de la circunferencia, y la mitad de la cuerda común es el lado buscado. El error es seis veces menor que el de $6R/7$, y el hueco al cerrar el polígono, de 0,78° (unos 0,4 mm con $R = 30$ mm), queda en el grosor del trazo.

VII. CONCLUSIONES

El intento de construir el heptágono dividiendo en siete partes el perímetro del hexágono falla por un 1,22 % en el lado y deja un hueco de 4,72° al cerrar el polígono. El error no está en la ejecución: el teorema de Tales divide el segmento exactamente. Está en la premisa, porque el perímetro de los polígonos inscritos no es constante sino que crece con el número de lados, de $6R$ en el hexágono a $6,0744 R$ en el heptágono. Y no tiene arreglo dentro de las reglas de juego: el cuadrado del lado es raíz de un cúbico irreducible y ninguna construcción con regla y compás, ni con escuadra y cartabón, puede producirlo. Lo que sí puede elegirse es una buena aproximación, y la de Herón, $\sqrt{3}R/2$, es seis veces mejor y más sencilla de trazar.

REFERENCIAS

- [1] Arquímedes, «Medida del círculo», en *Tratados I*, trad. P. Ortiz García. Madrid: Gredos, 2005.
- [2] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig: Fleischer, 1801, sec. VII.
- [3] P. L. Wantzel, «Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas», *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, pp. 366–372, 1837.
- [4] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*. Nueva York: Springer, 2000, secs. 29–31.
- [5] A. M. Gleason, «Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon», *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, n.º 3, pp. 185–194, 1988.
- [6] A. Durero, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit*. Núremberg, 1525, libro II.