

El hexágono del cuadrado: anatomía de una construcción aproximada

OXABITS

Nota técnica — Jerez de la Frontera, septiembre de 2026

oxabits.com

Resumen—Se analiza una construcción del hexágono ideada por el autor en la infancia: sobre un cuadrado de lado L se marcan los puntos $L/4$ y $3L/4$ de los lados horizontales y los puntos medios de los verticales, y se unen. El resultado parece un hexágono regular pero no lo es: sus lados inclinados miden $\sqrt{5}L/4$, un 11,80 % más que los horizontales, y sus ángulos interiores valen $116,57^\circ$ y $126,87^\circ$ en lugar de 120° . Se demuestra que la figura es exactamente un hexágono regular estirado verticalmente en el factor $2/\sqrt{3} \approx 1,1547$: las abscisas son correctas y todo el error procede de haber partido de un cuadrado en lugar de un rectángulo de proporción $\sqrt{3}/2$. Se da la corrección exacta con compás y se prueba que ninguna subdivisión del lado, por fina que sea, puede proporcionarla sin él, pues no existe triángulo equilátero con vértices de coordenadas racionales. Las mejores aproximaciones se obtienen de la fracción continua de $\sqrt{3}/2$, cuya primera reducida no trivial es precisamente el cuadrado de partida.

Palabras clave—Hexágono regular, construcciones aproximadas, transformaciones afines, fracciones continuas, puntos racionales, cociente isoperimétrico.

I. INTRODUCCIÓN

EL HEXÁGONO regular es, con el triángulo equilátero y el cuadrado, uno de los tres polígonos que cualquier escolar aprende a dibujar. La construcción canónica es la de Euclides [1]: con el compás abierto a un radio cualquiera se traza una circunferencia y, sin cerrarlo, se lleva ese mismo radio seis veces sobre ella. El procedimiento es exacto porque el lado del hexágono regular coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

Esta nota examina otra construcción, bastante menos ortodoxa, que el autor ideó siendo niño y que ejecutaba con la regla y la escuadra, sin compás. Sobre un cuadrado perfecto de lado L se marcan en los lados horizontales los puntos situados a $L/4$, $L/2$ y $3L/4$, y en los verticales sus puntos medios, a $L/2$. Uniendo después las marcas de $L/4$ y $3L/4$ con los puntos medios de los lados verticales aparece una figura de seis lados con un aire de familia innegable con el hexágono regular.

La pregunta que se plantea es doble. En primer lugar, cuánto se equivoca exactamente la construcción, medido en lados, ángulos y área. En segundo lugar, y más interesante, *por qué* se equivoca: si el error es una torpeza sin estructura o, por el contrario, obedece a una causa precisa que admita corrección. Se verá que la respuesta es la segunda, y que la corrección conduce, por un camino inesperado, a la aritmética de los números irracionales.

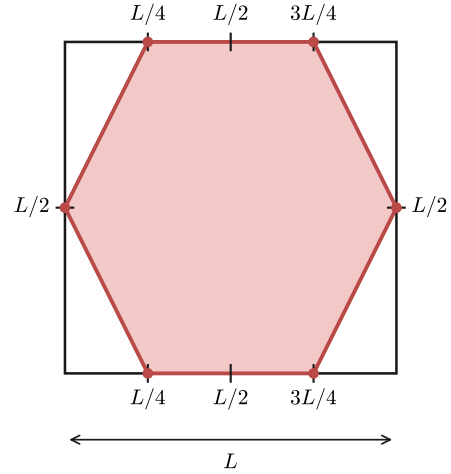


Fig. 1. La construcción original. Sobre un cuadrado de lado L se marcan $L/4$, $L/2$ y $3L/4$ en los lados horizontales y $L/2$ en los verticales; uniendo las marcas de $L/4$ y $3L/4$ con los puntos medios de los lados verticales se obtiene un hexágono de aspecto regular.

II. LA CONSTRUCCIÓN

Sitúese el cuadrado con su vértice inferior izquierdo en el origen, de modo que ocupa $[0, L] \times [0, L]$. Los seis vértices del hexágono, recorridos en sentido antihorario desde el inferior izquierdo, son

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{L}{4}, 0\right), & P_2 &= \left(\frac{3L}{4}, 0\right), & P_3 &= \left(L, \frac{L}{2}\right), \\ P_4 &= \left(\frac{3L}{4}, L\right), & P_5 &= \left(\frac{L}{4}, L\right), & P_6 &= \left(0, \frac{L}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

La marca de $L/2$ en los lados horizontales no interviene en ningún segmento: sirve únicamente como referencia de simetría, y así la usaba el autor para comprobar a ojo que la figura quedaba centrada (Fig. 1).

La figura tiene, por construcción, dos ejes de simetría —la horizontal y la vertical que pasan por el centro del cuadrado— y simetría central. Sus lados opuestos son, en consecuencia, paralelos dos a dos. Hasta aquí todo coincide con lo que se espera de un hexágono regular. Las diferencias aparecen al medir.

III. ANATOMÍA DEL ERROR

III-A. Lados

Los dos lados horizontales, P_1P_2 y P_4P_5 , miden

$$\ell_h = \frac{3L}{4} - \frac{L}{4} = \frac{L}{2}. \quad (2)$$

Los cuatro lados inclinados son iguales entre sí por simetría. Basta, pues, medir uno de ellos, por ejemplo P_2P_3 , que avanza $L/4$ en horizontal y $L/2$ en vertical:

$$\ell_i = \sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = L\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4} L \approx 0,5590 L. \quad (3)$$

En un hexágono regular todos los lados son iguales. Aquí no: el cociente entre ambos tipos de lado es

$$\frac{\ell_i}{\ell_h} = \frac{\sqrt{5}/4}{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180, \quad (4)$$

de modo que los lados inclinados son un 11,80 % más largos que los horizontales. Es una diferencia que el ojo tolera en un dibujo, pero que una regla detecta sin dificultad.

III-B. Ángulos

El lado P_2P_3 sube $L/2$ mientras avanza $L/4$, luego su pendiente es 2 y forma con la horizontal el ángulo

$$\theta = \arctan 2 \approx 63,435^\circ, \quad (5)$$

frente a los 60° del hexágono regular. De aquí se siguen los ángulos interiores. En los cuatro vértices de los lados horizontales el ángulo es el suplementario de θ ; en los dos vértices laterales, P_3 y P_6 , concurren dos lados inclinados simétricos y el ángulo vale el doble:

$$\alpha_2 = 180^\circ - \theta \approx 116,57^\circ, \quad \alpha_3 = 2\theta \approx 126,87^\circ. \quad (6)$$

Conviene comprobar que la suma cuadra, porque es una buena prueba de que no se ha escapado nada. Los ángulos interiores de cualquier hexágono suman $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$, y en efecto

$$4(180^\circ - \theta) + 2(2\theta) = 720^\circ - 4\theta + 4\theta = 720^\circ, \quad (7)$$

cualquiera que sea θ . El error angular, pues, no desaparece sino que se reparte: los cuatro ángulos de los lados horizontales se quedan cortos en $3,43^\circ$ cada uno, y los dos laterales se pasan en $6,87^\circ$, exactamente el doble, para que la cuenta total no varíe.

III-C. Área

El hexágono es el cuadrado menos cuatro triángulos rectángulos de esquina, de catetos $L/4$ y $L/2$. Cada uno tiene área $L^2/16$, luego

$$A_n = L^2 - 4 \cdot \frac{L^2}{16} = \frac{3}{4} L^2. \quad (8)$$

El hexágono regular de igual anchura, esto es, de lado $s = L/2$, tiene área

$$A_r = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} L^2 \approx 0,6495 L^2. \quad (9)$$

La Tabla I reúne todas las magnitudes frente a las de ese hexágono regular de referencia.

TABLA I
EL HEXÁGONO DEL CUADRADO FRENTE AL REGULAR DE IGUAL ANCHURA

magnitud	cuadrado	regular	desviación
lado horizontal	0,5000 L	0,5000 L	0
lado inclinado	0,5590 L	0,5000 L	+11,80 %
ángulo en P_2	116,57°	120°	-3,43°
ángulo en P_3	126,87°	120°	+6,87°
altura	1,0000 L	0,8660 L	+15,47 %
área	0,7500 L^2	0,6495 L^2	+15,47 %

IV. UN HEXÁGONO REGULAR ESTIRADO

IV-A. La observación clave

La última columna de la Tabla I esconde una regularidad que merece subrayarse: la altura y el área se desvían *exactamente* en el mismo porcentaje, un 15,47 %. No es casualidad, y tirando de ese hilo se descubre la estructura completa del error.

Colóquese el origen en el centro del cuadrado. El hexágono regular de lado $L/2$ con dos lados horizontales tiene sus vértices en

$$\left(\pm \frac{L}{2}, 0\right), \quad \left(\pm \frac{L}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{4} L\right), \quad (10)$$

mientras que los de la construcción, en las mismas coordenadas centradas, son

$$\left(\pm \frac{L}{2}, 0\right), \quad \left(\pm \frac{L}{4}, \pm \frac{L}{2}\right). \quad (11)$$

Las abscisas coinciden todas. Las ordenadas nulas coinciden también, y las no nulas difieren en un factor constante:

$$\lambda = \frac{L/2}{\sqrt{3} L/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547. \quad (12)$$

El hexágono del cuadrado es, por tanto, *exactamente* la imagen del hexágono regular por la transformación $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$: un estiramiento vertical puro, sin ninguna otra deformación (Fig. 2).

IV-B. Lo que el estiramiento explica

Un estiramiento en una sola dirección es una transformación afín, y las transformaciones afines conservan el paralelismo, los puntos medios y las razones entre áreas [2], pero no las longitudes ni los ángulos. Con esto se entiende de golpe todo lo observado:

- Los lados horizontales no cambian, porque el estiramiento no actúa en horizontal. Por eso miden $L/2$, exactamente lo mismo que en el regular.
- Los lados inclinados sí cambian, porque tienen componente vertical. Su pendiente pasa de $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ a $\lambda\sqrt{3} = 2$, que es justamente la pendiente hallada en (5).
- Los lados opuestos siguen siendo paralelos y la figura conserva sus simetrías, porque el paralelismo y la simetría respecto a los ejes sobreviven al estiramiento.
- Todas las áreas se multiplican por λ . Por eso el área y la altura se desvían en el mismo porcentaje:

$$\lambda A_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} L^2 = \frac{3}{4} L^2 = A_n. \quad (13)$$

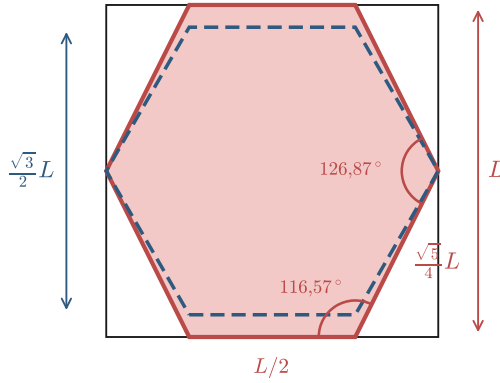


Fig. 2. El hexágono del cuadrado (rosa, trazo continuo) superpuesto al hexágono regular de igual anchura (azul, discontinuo). Los cuatro vértices laterales coinciden en abscisa y los dos de los extremos coinciden por completo: toda la diferencia es un estiramiento vertical de factor $2/\sqrt{3}$, que alarga los lados inclinados y abre los ángulos laterales.

IV-C. Dónde estaba el acierto

La lectura de (10) y (11) tiene una consecuencia que conviene hacer explícita, porque es lo más valioso de la construcción: las marcas horizontales eran *exactas*. En un hexágono regular de anchura L el lado mide $L/2$, igual que el radio; el lado superior, centrado, se extiende por tanto desde $L/4$ hasta $3L/4$. La intuición de marcar los cuartos era, sin saberlo, la construcción de Euclides leída en horizontal.

El error está en otra parte, y es uno solo: la altura. Un hexágono regular de anchura L no cabe en un cuadrado, sino en un rectángulo de proporción

$$\frac{H}{W} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660. \quad (14)$$

El cuadrado tiene, pues, un 15,47 % de altura de más, y ese exceso se transmite íntegro al área y se reparte entre lados y ángulos como se ha visto.

V. LA CORRECCIÓN EXACTA

Identificada la causa, la corrección es inmediata: basta con sustituir el cuadrado por un rectángulo de base L y altura $\sqrt{3}L/2$ y repetir exactamente las mismas marcas. La única dificultad es obtener esa altura, y la resuelve un triángulo equilátero auxiliar, cuya altura es precisamente $\sqrt{3}L/2$. Con el compás abierto a la longitud L se trazan dos arcos desde los extremos de la base; su intersección es el tercer vértice del triángulo, y la paralela a la base por ese punto cierra el rectángulo (Fig. 3).

Obsérvese el precio: la corrección requiere el compás. Cabe preguntarse si podría evitarse, conservando el espíritu de la construcción original —regla, escuadra y subdivisiones del lado— y afinando simplemente las marcas.

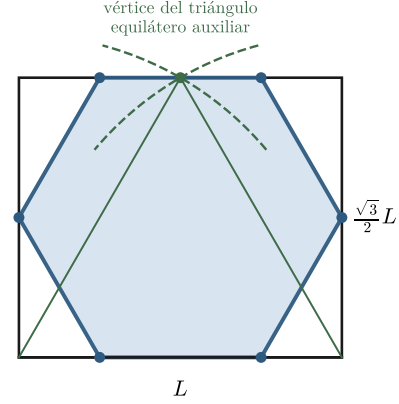


Fig. 3. Corrección exacta. Dos arcos de radio L desde los extremos de la base determinan el vértice de un triángulo equilátero, cuya altura $\sqrt{3}L/2$ fija el rectángulo correcto. Con las mismas marcas de la construcción original ($L/4$ y $3L/4$ en los lados horizontales, puntos medios en los verticales) el hexágono resulta ahora regular.

VI. ¿SE PODÍA SIN COMPÁS?

VI-A. Un teorema de imposibilidad

La respuesta es negativa, y la razón es aritmética. Todas las marcas que se obtienen dividiendo el lado del cuadrado en partes iguales, sea en mitades, en cuartos o en quinceavos, tienen coordenadas que son fracciones racionales de L . Tomando L como unidad, se trata de puntos de coordenadas racionales. Pues bien:

No existe ningún triángulo equilátero cuyos tres vértices tengan coordenadas racionales.

La demostración es breve. Si los vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) son racionales, el área del triángulo, dada por la fórmula del cordón,

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|, \quad (15)$$

es una combinación de sumas, restas y productos de racionales, y por tanto racional. Por otra parte, si el triángulo es equilátero de lado d , su área vale

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2, \quad (16)$$

y $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ es también racional y no nulo. Entonces $\sqrt{3} = 4A/d^2$ sería un cociente de racionales, lo cual es falso. La contradicción prueba el enunciado.

Ahora bien, en todo hexágono regular los vértices alternos P_1 , P_3 y P_5 forman un triángulo equilátero. Se sigue que *ningún hexágono con vértices en puntos racionales puede ser regular*, por fina que sea la subdivisión del lado y cualquiera que sea la orientación de la figura. El método del cuadrado, entendido como método de regla y marcas, es estructuralmente aproximado: el error puede hacerse tan pequeño como se quiera, pero nunca nulo.

Merece la pena comparar esta imposibilidad con la del heptágono regular, que no puede construirse ni siquiera con compás. Allí el obstáculo es que $\cos(2\pi/7)$ es raíz de una cúbica irreducible; aquí es mucho más modesto: basta

TABLA II
APROXIMACIONES RACIONALES DE LA PROPORCIÓN $\sqrt{3}/2$

fracción p/q	valor	error de altura
<i>Reducidas de la fracción continua</i>		
1/1 (el cuadrado)	1,000000	+15,470 %
6/7	0,857143	-1,026 %
13/15	0,866667	+0,074 %
84/97	0,865979	-0,0053 %
181/209	0,866029	+0,0004 %
<i>Divisiones sucesivas por mitades</i>		
3/4	0,750000	-13,397 %
7/8	0,875000	+1,036 %
55/64	0,859375	-0,768 %
111/128	0,867188	+0,134 %

una raíz cuadrada, $\sqrt{3}$, para quedar fuera del alcance de las fracciones. El compás, que sí produce raíces cuadradas, lo resuelve; la regla con marcas, que sólo produce fracciones, no.

VI-B. Las mejores aproximaciones

Si la proporción exacta $\sqrt{3}/2$ es inalcanzable, la pregunta pertinente es qué fracción p/q la aproxima mejor con un número razonable de divisiones del lado. La respuesta clásica la da el desarrollo en fracción continua [3], que para este número es periódico:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = [0; 1, \overline{6, 2}] = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \dots}}}}. \quad (17)$$

Truncando el desarrollo se obtienen las reducidas 1/1, 6/7, 13/15, 84/97, 181/209..., cada una de las cuales es la mejor aproximación posible entre todas las fracciones de denominador no mayor.

Aquí aparece la sorpresa que da sentido a esta nota: la primera reducida es 1/1, es decir, el cuadrado. La construcción infantil no era un error arbitrario, sino la aproximación racional más sencilla posible de la proporción correcta. Tomar un rectángulo de altura pL/q con cualquiera de las reducidas siguientes mejora el resultado de forma espectacular, como recoge la Tabla II.

Desde un punto de vista práctico, la reducida 13/15 es la más interesante. Dividir el lado en quince partes es perfectamente factible con una regla milimetrada, y el error resultante, del 0,074 %, equivale en un dibujo de 20 cm de anchura a apenas 0,13 mm de altura: por debajo del grosor de un trazo de lápiz. La Fig. 4 muestra que la estrategia natural de un niño, ir partiendo por la mitad, converge mucho más despacio: con 128 divisiones se queda en un 0,134 %, casi el doble que con 15 divisiones bien elegidas. Es la ventaja de las reducidas: no dependen de la base en la que se cuenta, sino del propio número.

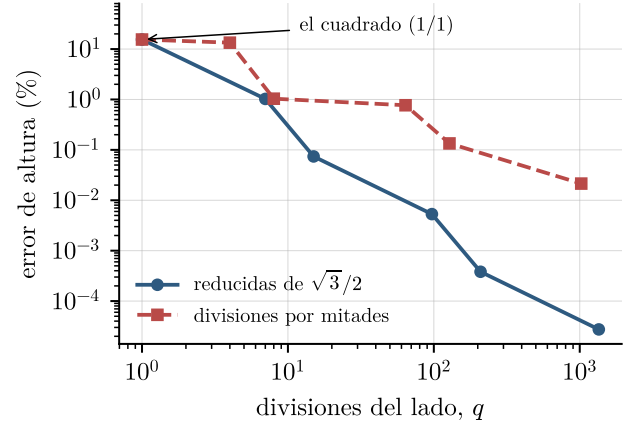


Fig. 4. Error de altura frente al número de divisiones del lado, en escala doblemente logarítmica. Las reducidas de $\sqrt{3}/2$ (azul) mejoran mucho más deprisa que las divisiones sucesivas por mitades (rojo). Ninguna de las dos curvas llega a cero.

VII. UNA COINCIDENCIA NUMÉRICA

Queda una curiosidad que no resiste la tentación de ser anotada. Una medida clásica de lo *redonda* que es una figura plana es el cociente isoperimétrico

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi A}{P^2}, \quad (18)$$

que vale 1 para el círculo y menos para cualquier otra figura. Para el hexágono regular resulta $Q_r = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,906900$, el mismo número que aparece en la nota técnica sobre el área del triángulo como densidad del empaquetado hexagonal. Para el hexágono del cuadrado, con perímetro $P = 2 \cdot \frac{L}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}L = (1 + \sqrt{5})L$ y área $\frac{3}{4}L^2$,

$$Q_n = \frac{3\pi}{(1 + \sqrt{5})^2} = \frac{3\pi}{6 + 2\sqrt{5}} \approx 0,899986. \quad (19)$$

El valor difiere de 0,9 en menos de $1,4 \cdot 10^{-5}$. Conviene advertirlo con claridad: se trata de una coincidencia sin contenido, pues nada en la construcción apunta al número 9/10. Pero ilustra bien por qué la figura engaña tanto a la vista: pese a sus lados desiguales y sus ángulos de 116° y 127° , es casi tan redonda como el hexágono regular, apenas un 0,76 % menos.

VIII. CONCLUSIONES

1. La construcción del cuadrado no produce un hexágono regular. Sus lados inclinados miden $\sqrt{5}L/4$, un 11,80 % más que los horizontales, y sus ángulos interiores valen $116,57^\circ$ y $126,87^\circ$ en lugar de 120° .
2. El error tiene una causa única y precisa: la figura es exactamente un hexágono regular estirado verticalmente en el factor $2/\sqrt{3}$. Las marcas horizontales eran exactas; sólo sobraba altura, porque el hexágono regular no cabe en un cuadrado sino en un rectángulo de proporción $\sqrt{3}/2$.
3. Con compás, la corrección es inmediata mediante un triángulo equilátero auxiliar. Sin compás es imposible: ningún triángulo equilátero tiene vértices

racionales, y por tanto ninguna subdivisión del lado, por fina que sea, da un hexágono regular exacto.

4. Las mejores aproximaciones proceden de la fracción continua de $\sqrt{3}/2$. Su primera reducida es $1/1$, el propio cuadrado; la tercera, $13/15$, reduce el error a un 0,074 %, invisible a cualquier escala de dibujo.

La conclusión general es amable con el niño que ideó la construcción. Su hexágono no era regular, pero tampoco era un error cualquiera: era la aproximación racional más simple de una proporción irracional, y contenía ya, en sus marcas de $L/4$ y $3L/4$, la mitad exacta de la respuesta. Lo que le faltaba no era intuición, sino una raíz cuadrada.

REFERENCIAS

- [1] Euclides, *Elementos*, libro IV, proposición 15. Trad. M. L. Puer-tas Castaños, *Elementos. Libros I–IV*. Madrid: Gredos, 1991.
- [2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2.^a ed. Nueva York: Wiley, 1969, cap. 13.
- [3] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6.^a ed. Oxford: Oxford University Press, 2008, cap. 10.