

Del triángulo equilátero al copo de nieve de Koch: la regla del tercio

OXABITS

Nota técnica — Jerez de la Frontera, septiembre de 2026

oxabits.com

Resumen—Se parte de una figura clásica: un triángulo equilátero de lado L con sus circunferencias inscrita y circunscrita y el hexágono regular inscrito en ésta. Se demuestra que la tangente al círculo inscrito paralela a la base corta el triángulo a dos tercios de su altura, en un segmento de longitud exactamente $L/3$ situado sobre el tercio central de la base, y que iterando hacia el vértice se obtiene una torre de círculos de radios $r/3^n$ y segmentos de longitudes $L/3^n$ cuyos diámetros suman exactamente la altura. Las tres tangentes forman un segundo triángulo equilátero, simétrico del primero respecto del centro, y los dos juntos componen la estrella de seis puntas, que es la primera generación del copo de nieve de Koch: las puntas son triángulos de lado $L/3$ levantados sobre los tercios centrales de los lados. Se calculan el área del copo, $8/5$ la del triángulo, y su perímetro, que crece sin límite, y se demuestra que, colocando el círculo inscrito en cada una de sus piezas triangulares, los círculos ocupan exactamente la fracción $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 60,46\%$ del copo, la misma que en un solo triángulo.

Palabras clave—Triángulo equilátero, círculo inscrito, copo de nieve de Koch, fractales, autosemejanza, series geométricas.

I. INTRODUCCIÓN

EN el triángulo equilátero el número 3 aparece por todas partes: el radio del círculo inscrito es un tercio de la altura, el circunscrito es el doble del inscrito, y los triángulos que se recortan en las esquinas con tangentes al círculo inscrito tienen un tercio del lado. Esta última propiedad es la base de una nota anterior, en la que una cascada de círculos en las esquinas proporciona una serie geométrica de razón $1/3$ para el área [1].

El mismo tercio es el que usó Helge von Koch en 1904 para construir su curva: se divide un segmento en tres partes iguales y sobre la central se levanta un triángulo equilátero [2]. La coincidencia no es casual, y esta nota la hace explícita. Partiendo de la figura habitual del triángulo con sus dos circunferencias, se muestra que la primera generación del copo de nieve de Koch ya está dibujada en ella, y se sigue la construcción hasta el copo completo.

II. LA FIGURA DE PARTIDA

Sea un triángulo equilátero de lado L con la base horizontal (Fig. 1). Su altura es $H = \frac{\sqrt{3}}{2}L$. Las tres alturas se cortan en el centro O , que es a la vez incentro, circuncentro y baricentro, y por ser baricentro divide cada altura en la razón $2 : 1$. Por tanto:

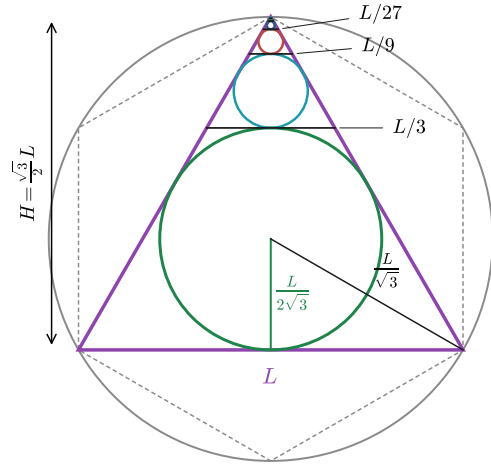


Fig. 1. El triángulo equilátero de lado L con su círculo inscrito (verde), su circunferencia circunscrita (gris) y el hexágono inscrito en ésta (discontinuo). Hacia el vértice superior, la torre de círculos tangentes: cada tangente horizontal corta el triángulo en un segmento de longitud $L/3^n$.

- el radio del círculo inscrito, distancia de O a la base, es $r = \frac{H}{3} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$;
- el radio del círculo circunscrito, distancia de O a un vértice, es $R = \frac{2H}{3} = \frac{L}{\sqrt{3}} = 2r$.

El hexágono regular inscrito en la circunferencia circunscrita tiene lado $R = L/\sqrt{3}$, y tres de sus vértices, alternos, son los del triángulo.

III. LA TORRE DE CÍRCULOS

Proposición 1: La tangente al círculo inscrito paralela a la base corta el triángulo en un segmento de longitud $L/3$ que está situado exactamente sobre el tercio central de la base.

Demostración: El punto más alto del círculo inscrito está a altura $2r = \frac{2}{3}H$. La tangente horizontal por ese punto deja por encima un triángulo equilátero de altura $H - \frac{2}{3}H = \frac{H}{3}$, semejante al grande en la razón $1/3$; su base, que es el segmento de corte, mide $L/3$. Por simetría está centrado sobre el eje vertical, y ocupa por tanto las abscisas de $L/3$ a $2L/3$ si la base va de 0 a L . ■

El triángulo que queda por encima es una copia del original a escala $1/3$, y en él puede repetirse la construcción: su círculo inscrito tiene radio $r/3$ y es tangente al primero, su tangente horizontal corta un segmento de longitud $L/9$, y así sucesivamente. En el paso n se obtiene un círculo de radio $r_n = r/3^n$ y un segmento de corte de longitud $L/3^n$, a altura $H(1 - 3^{-n})$.

Proposición 2: Los diámetros de la torre de círculos cubren la altura del triángulo sin huecos ni solapamientos.

Demostración: Cada círculo toca por abajo el segmento de corte anterior y por arriba el siguiente, y los círculos son tangentes entre sí en esos puntos. La suma de sus diámetros es una serie geométrica de razón $1/3$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2r}{3^n} = 2r \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = 3r = H.$$

La torre es la rama vertical de la cascada de esquinas de [1]; allí se colocan círculos en las tres esquinas de cada triángulo recortado, y aquí sólo en la del vértice superior.

IV. LA ESTRELLA DE SEIS PUNTAS

Las tres tangentes al círculo inscrito paralelas a los lados, una por cada lado, son las que recortan los triángulos de las tres esquinas. Tomadas juntas, forman una figura más interesante (Fig. 2).

Proposición 3: Las tres tangentes forman un triángulo equilátero igual al original, simétrico de él respecto del centro O y con su misma circunferencia circunscrita. Los dos triángulos juntos forman una estrella de seis puntas cuyo núcleo es un hexágono regular de lado $L/3$.

Demostración: La simetría central de centro O lleva cada lado del triángulo a una recta paralela, situada a la misma distancia r de O pero al otro lado: es la tangente al círculo inscrito paralela a ese lado. Las tres tangentes son, pues, los lados del triángulo simétrico, que es igual al original y tiene el mismo circuncentro y el mismo circunradio. Por la proposición 1, cada tangente corta al triángulo original en su tercio central, así que la intersección de los dos triángulos es el triángulo original sin sus tres esquinas de lado $L/3$: un hexágono de lados alternos iguales a $L/3$ (los de corte) y $L - 2L/3 = L/3$ (lo que queda de cada lado). Tiene los seis lados iguales y, por la simetría de orden seis, es regular. ■

Los seis vértices de la estrella son los del hexágono inscrito en la circunferencia circunscrita de la Fig. 1. Las tres puntas del triángulo simétrico que sobresalen del original son triángulos equiláteros de lado $L/3$ levantados hacia fuera sobre los tercios centrales de los lados. Esa es, literalmente, la primera generación del copo de nieve de Koch. Además, la punta inferior es la imagen por la simetría central del triángulo superior de la torre, y su círculo inscrito es la imagen del primer círculo de la torre: la torre que sube hacia el vértice, reflejada en el centro, baja hacia la primera punta del copo.

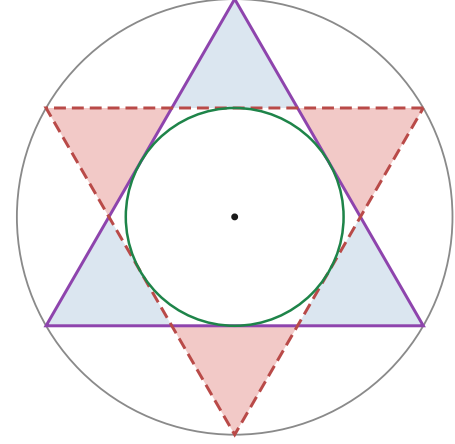


Fig. 2. Las tres tangentes al círculo inscrito forman el triángulo simétrico (rojo discontinuo). Las esquinas del original (azul) y las puntas del simétrico (rosa) son triángulos equiláteros de lado $L/3$; las puntas rosas son la primera generación del copo de Koch.

V. EL COPO DE NIEVE

V-A. Construcción

El copo de nieve de Koch se obtiene repitiendo indefinidamente la operación de la estrella: en cada generación, sobre el tercio central de cada segmento del contorno se levanta hacia fuera un triángulo equilátero y se suprime la base [2]. Cada segmento se sustituye por cuatro segmentos de un tercio de su longitud. Partiendo de los 3 lados del triángulo, en la generación n el contorno tiene $3 \cdot 4^n$ segmentos de longitud $L/3^n$, y se añaden $3 \cdot 4^{n-1}$ triángulos nuevos de lado $L/3^n$ (TABLA I).

V-B. Perímetro y área

El perímetro en la generación n es $P_n = 3L(4/3)^n$, que crece sin límite: el copo tiene perímetro infinito. El área, en cambio, converge. Si $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ es el área del triángulo, cada triángulo de la generación n tiene área $A_0/9^n$, y

$$A = A_0 \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right) = A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 4/9} \right) = \frac{8}{5} A_0. \quad (1)$$

La razón de la serie es $4/9$: el número de triángulos se multiplica por 4 y el área de cada uno se divide por 9. En la nota del triángulo, la cascada de esquinas multiplicaba por 3 y dividía por 9, con razón $1/3$ [1]; aquí el cuarto segmento que añade cada generación hace crecer el número de piezas más deprisa, pero no lo bastante para que la serie diverja.

La curva límite es el ejemplo clásico de fractal: es continua, no tiene tangente en ningún punto y su dimensión de Hausdorff es $\log 4 / \log 3 \approx 1,2619$, entre la de una línea y la de una superficie [3], [4].

V-C. Círculos en el copo

El copo está formado por piezas que son todos triángulos equiláteros, con interiores disjuntos: el triángulo original y

TABLA I
GENERACIONES DEL COPO DE NIEVE DE KOCH

n	Triángulos nuevos	Lado	Perímetro	Área/ A_0
0	1	L	$3L$	1
1	3	$L/3$	$4L$	1,333 3
2	12	$L/9$	$5,333 3 L$	1,481 5
3	48	$L/27$	$7,111 1 L$	1,547 3
4	192	$L/81$	$9,481 5 L$	1,576 6
∞	—	0	∞	1,6

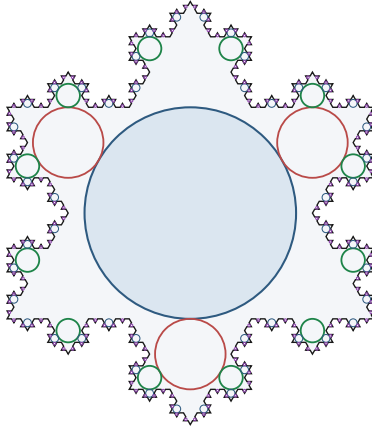


Fig. 3. Copo de Koch hasta la cuarta generación con el círculo inscrito de cada pieza triangular: el del triángulo original (azul), los tres de radio $r/3$ (rojo), los doce de radio $r/9$ (verde) y los de las generaciones siguientes.

los triángulos añadidos en cada generación. Colocando en cada pieza su círculo inscrito se obtiene la Fig. 3.

Proposición 4: Los círculos inscritos en las piezas del copo ocupan una fracción $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 60,46 \%$ de su área, la misma que el círculo inscrito ocupa en un solo triángulo.

Demostración: En todo triángulo equilátero de lado ℓ el círculo inscrito tiene área $\pi\ell^2/12$ y el triángulo $\sqrt{3}\ell^2/4$, con cociente $\pi/(3\sqrt{3})$ independiente de ℓ . Como el copo es la unión de piezas equiláteras con interiores disjuntos, la suma de las áreas de los círculos es esa fracción de la suma de las áreas de las piezas, que es el área del copo. Explícitamente, el área de los círculos es $\frac{8}{5}\pi r^2 = \frac{2\pi}{15}L^2$, y la del copo $\frac{8}{5}A_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}L^2$. ■

El cálculo numérico hasta la cuarta generación, con 255 piezas, da el cociente 0,604 599 79, igual a $\pi/(3\sqrt{3})$ en todas las cifras. El mismo argumento vale si en cada pieza se coloca, en vez del círculo inscrito solo, la cascada completa de círculos de esquina de [1], que queda dentro de la pieza: la fracción ocupada es entonces $\pi\sqrt{3}/6 \approx 90,69 \%$, también la misma que en un solo triángulo. La autosemejanza del copo hace que cualquier proporción que valga en una pieza valga en el conjunto.

VI. CONCLUSIONES

La tangente al círculo inscrito de un triángulo equilátero lo corta en un tercio de su lado, sobre el tercio central de la base. Esa regla del tercio genera, hacia el vértice, una torre de círculos cuyos diámetros suman exactamente la altura y, con las tres tangentes a la vez, el triángulo simétrico que forma con el original la estrella de seis puntas: la primera generación del copo de nieve de Koch, con sus puntas de lado $L/3$ sobre los tercios centrales de los lados. Iterando se llega al copo, con perímetro infinito y área $8/5$ la del triángulo. Y como el copo está hecho de triángulos equiláteros, los círculos inscritos en sus piezas ocupan de él exactamente la misma fracción, $\pi/(3\sqrt{3})$, que el círculo inscrito ocupa en el triángulo de partida.

REFERENCIAS

- [1] OXABITS, «Cálculo del área de un triángulo equilátero mediante desarrollos en serie de círculos inscritos», nota técnica, 2026.
- [2] H. von Koch, «Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire», *Ark. Mat. Astron. Fys.*, vol. 1, pp. 681–702, 1904.
- [3] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. Nueva York: W. H. Freeman, 1982.
- [4] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3.^a ed. Chichester: Wiley, 2014.